Εργασία 1 - Συνέλιξη και Σειρές Fourier: Μαθηματικοί υπολογισμοί και απεικόνιση σε Matlab

Δημήτρης Χαριστές

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

ICTE234: Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων

Δρ. Τσίπουρας, Μάρκος

21 Μαΐου, 2023

1. Συνέλιξη

.

**Α)** ,

Εύρεση .

Αρχικά:

, .

Μετασχηματίζουμε τις x(t) και h(t) στην παρακάτω μορφή με άγνωστη μεταβλητή το τ. Οπότε:

,

Διερεύνηση:

* Για . Τότε η x στο διάστημα , είναι 0, καθως ενώ για η h είναι 0 καθώς , άρα για , η συνέλιξη .
* Για Τότε έχουμε συνέλιξη στο διάστημα . Άρα:

.

Οποτε η συνέλιξη στο είναι: .

**Β)** ,

Αρχικά:

Εύρεση .

* Η h αποτελεί άλυτο ολοκλήρωμα, οπότε επιλέγουμε να λυσουμε την συνελιξη με μετασχηματισμό Fourier: .
* Αφου βρούμε τους ΜΣ Fourier: , λύνουμε αλγεβρικά την εξίσωση ως προς C(ω), δηλαδή υπολογίζουμε το γινόμενο .
* Οπότε c(t) είναι ο αντίστροφος ΜΣ Fourier του .

Επίλυση:

* Βρίσκουμε τον ΜΣ Fourier του x(t):

.

* Βρίσκουμε τον ΜΣ Fourier της h(t):

.

Οπότε η C(ω) είναι:

.

Άρα: .

**Γ)** ,

Αρχικά:

, .

Μετασχηματίζουμε τις x(t) και h(t) στην παρακάτω μορφή με άγνωστη μεταβλητή το τ. Οπότε:

,

.

Διερεύνηση:

* Για . Στο διάστημα και η x είναι 0 οπότε η συνέλιξη είναι c(t)=0. Στο διαστημα η συνελιξη είναι μη μηδενική:

, για .

* Για . Ομοίως εχουμε συνελιξη μονο στο διαστημα . Η h αλλαζει τιμη στο . Οπότε θα ολοκληρώσουμε στο :

, για .

* Για , εχουμε πάλι συνελιξη μόνο στο διαστημα οπου η αφού . Από συναλυθευση ισχυει:

-2 t

, για .

Οποτε η συνέλιξη στο είναι: .

**Δ)** ,

Συνέλιξη: .

Μετασχηματίζουμε τις x(t) και h(t) όπως στην παραπάνω μορφή με άγνωστη μεταβλητή το τ :

Διερεύνηση:

* Εφόσον h περιοδική το διάστημα εξαρτάται μόνο από το πεδίο ορισμού της x. Οπότε έχουμε συνέλιξη στο καθώς μόνο εκεί η x είναι μη μηδενική. Άρα:

, για .

Οπότε η συνέλιξη στο είναι:

.

**Ε)** ,

Αρχικά:

, .

Μετασχηματίζουμε τις x(t) και h(t) όπως στην παραπάνω μορφή με άγνωστη μεταβλητή το τ :

,

.

Διερεύνηση:

* Για . Στο διάστημα η x είναι 0, και οπουδήποτε αλλού η h είναι 0 αρά και η συνέλιξη για , .
* Για . Στο διάστημα η x(τ) είναι 0 ενώ στο διάστημα η h είναι 0. Στο μόνο διάστημα που έχουμε συνέλιξη είναι το . Οπότε:

, για .

* Για . Έχουμε συνέλιξη μόνο στο διάστημα καθώς η h είναι 0 οπουδήποτε αλλού αρά και η c. Οπότε:

, για .

* Για . Άρα έχουμε συνέλιξη στο διάστημα , διότι: Η x(τ) είναι 0 για οπότε η συνέλιξη στο διάστημα είναι 0, ενώ η h είναι 0 οπουδήποτε εκτός του . Οπότε το μόνο διάστημα συνέλιξης είναι το . Άρα:

, για .

* Για . Στο διάστημα η x είναι 0, και οπουδήποτε αλλού η h είναι 0. Αρά η συνέλιξη για , είναι .

Οπότε η συνέλιξη στο είναι:

.

2. Σειρά Fourier

**Α)** Εύρεση σειράς Fourier της παρακάτω συνάρτησης x(t), για n=1,2,3,5,10.

,

Για την σειρά Fourier της x(t) ισχύει:

Γνωρίζουμε ότι:

, , .

Επίλυση:

Ισχύει ότι σύμφωνα με το διάστημα ορισμού της x(t). Βρίσκουμε λοιπόν τους συντελεστές .

* Εύρεση

.

* Εύρεση

…

Διερεύνηση για το :

* + Για . Άρα:

.

* + Για . Άρα:

.

Οπότε προκύπτει ότι: .

…επομένως αντικαθιστούμε το στο και βρίσκουμε ότι:

.

* Εύρεση :

…

Διερεύνηση για το :

* + Για . Άρα:

.

* + Για . Άρα:

.

Οπότε προκύπτει ότι: .

…επομένως αντικαθιστούμε και βρίσκουμε ότι:

.

Αντικαθιστούμε λοιπόν στην αρχική σχέση για την σειρά Fourier τα και βρίσκουμε την σειρά Fourier της x(t):